

Úkol měření

Určete modul pružnosti v tahu přímou metodou pro dva vzorky různých materiálů a výsledky porovnejte s tabulkovými hodnotami.

Postup měření

- 1) Změříme délku drátu kovovým měřítkem při základním zatížení s přesností na mm. ($a=1\text{m}$)
- 2) Posuvkou změříme délku páky q a vzdálenost p upevnění drátu na páce P od osy otáčení O .
- 3) Změříme průměr drátu mikrometrem na různých místech, abychom si ověřili konstantní průměr.
- 4) Podle materiálu a průměru drátu zvolíme velikost závaží.
- 5) Čteme nulovou polohu n_0 a další výchylky pro různá zatížení, postupující po jednotlivých závažích m , do nejvyššího zatížení a zase zpět do úplného odlehčení drátu.

Tabulky

Ocel:

Průměr drátu:

Průměry drátu d [m]	Δd_i
1,42E-03	1,933E-05
1,42E-03	1,933E-05
1,40E-03	-6,667E-07
1,41E-03	9,333E-06
1,38E-03	-2,067E-05
1,39E-03	-1,067E-05
1,40E-03	-6,667E-07
1,39E-03	-1,067E-05
1,39E-03	-1,067E-05
1,42E-03	1,933E-05
1,41E-03	9,333E-06
1,40E-03	-6,667E-07
1,40E-03	-6,667E-07
1,39E-03	-1,067E-05
1,39E-03	-1,067E-05
Průměrný průměr \bar{d}	1,401E-03
Pravděpodobná chyba $\vartheta(\bar{d})$	2,203E-06

Pod tabulkou je vždy příklad výpočtu se správným zaokrouhlením (Jelikož jsme se ale při měření průměru drátu dostali k hodnotám s malou pravděpodobnou chybou, není někde z praktických důvodů zaokrouhlení úplně správné).

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{1,42 * 10^{-3} + \dots + 1,39 * 10^{-3}}{15} \doteq 1,401 * 10^{-3} m$$

$$\Delta d_i = d_i - \bar{d} = 1,42 * 10^{-3} - 1,401 * 10^{-3} \doteq 1,933 * 10^{-5}$$

$$\bar{\vartheta}(\bar{d}) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{15(15-1)} \sum_{i=1}^n [(1,933 * 10^{-5})^2 + \dots + (-1,067 * 10^{-5})^2]} \doteq 2,2 * 10^{-6} m$$

$$\underline{\underline{d = (1,401 \pm 0,0022) * 10^{-3} m}}$$

Délka páky:

	q [m]	Δq_i
	1,023E-01	-2,000E-04
	1,025E-01	0,000E+00
	1,025E-01	0,000E+00
	1,027E-01	2,000E-04
	1,028E-01	3,000E-04
	1,022E-01	-3,000E-04
	1,025E-01	0,000E+00
Průměrná délka páky \bar{q}	1,025E-01	
Pravděpodobná chyba $\bar{\vartheta}(\bar{q})$	5,245E-05	

$$\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{n} = \frac{0,1023 + \dots + 0,1025 * 10^{-3}}{7} \doteq 0,1025 m$$

$$\Delta q_i = q_i - \bar{q} = 0,1023 - 0,1025 \doteq -0,0002$$

$$\bar{\vartheta}(\bar{q}) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta q_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{7(7-1)} \sum_{i=1}^n [(-0,0002)^2 + \dots + (0)^2]} \doteq 5,2 * 10^{-5} m$$

$$\underline{\underline{q = (0,1025 \pm 0,000052) m}}$$

Vzdálenost uchycení drátu od osy otáčení p:

	p [m]	Δp_i
	5,190E-02	0,000E+00
	5,170E-02	-2,000E-04
	5,210E-02	2,000E-04
	5,160E-02	-3,000E-04
	5,200E-02	1,000E-04
	5,220E-02	3,000E-04
	5,180E-02	-1,000E-04
Průměrná délka páky \bar{p}	5,190E-02	
Pravděpodobná chyba $\bar{\vartheta}(\bar{p})$	5,443E-05	

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} = \frac{0,0519 + \dots + 0,0518}{7} \doteq 0,0519m$$

$$\Delta p_i = p_i - \bar{p} = 0,0519 - 0,0519 = 0$$

$$\vartheta(\bar{p}) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta p_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{7(7-1)} \sum_{i=1}^n [(0)^2 + \dots + (-0,0001)^2]} \doteq 5,4 * 10^{-5} m$$

$$\underline{\underline{p = (0,0519 \pm 0,000054)m}}$$

Tabulka pro výpočet modulu pružnosti oceli:

Počet závaží	G _i [N]	n _i ' [m]	n _i '' [m]	n _i [m]	n _i - n ₀
0	0	0,303	0,305	0,304	0
1	9,81	0,315	0,317	0,316	0,012
2	19,62	0,325	0,327	0,326	0,022
3	29,43	0,334	0,335	0,3345	0,0305
4	39,24	0,342	0,343	0,3425	0,0385
5	49,05	0,35	0,351	0,3505	0,0465
6	58,86	0,358	0,358	0,358	0,054
Σ _i G _i	206,01			Σ _i (n _i - n ₀) →	0,2035

$$E = \frac{8alq}{\pi d^2 p^2} \frac{\sum_i G_i}{\sum_i (n_i - n_0)} = \frac{8 * 1 * 0,985 * 0,1025}{\pi * (1,401 * 10^{-3})^2 * 0,0519^2} * \frac{206,01}{0,2035} = 4,92281 * 10^{10} Pa$$

Bronz:

Průměr drátu:

Průměry drátu d [m]	Δd _i
1,42E-03	6,533E-06
1,43E-03	1,653E-05
1,41E-03	-3,467E-06
1,41E-03	-3,467E-06
1,41E-03	-3,467E-06
1,40E-03	-1,347E-05
1,40E-03	-1,347E-05
1,41E-03	-3,467E-06
1,42E-03	6,533E-06
1,41E-03	-3,467E-06
1,41E-03	-1,467E-06
1,43E-03	1,653E-05
1,41E-03	-3,467E-06
1,42E-03	6,533E-06
1,41E-03	-3,467E-06
Průměrný průměr d'	1,413E-03
Pravděpodobná chyba ϑ'(d')	1,542E-06

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = \frac{1,42 * 10^{-3} + \dots + 1,41 * 10^{-3}}{15} \doteq 1,413 * 10^{-3} m$$

$$\Delta d_i = d_i - \bar{d} = 1,42 * 10^{-3} - 1,413 * 10^{-3} \doteq 6,533 * 10^{-6}$$

$$\bar{\vartheta}(\bar{d}) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{15(15-1)} \sum_{i=1}^n [(6,533 * 10^{-6})^2 + \dots + (-3,467 * 10^{-6})^2]} \doteq 1,5 * 10^{-6} m$$

$$\underline{\underline{d = (1,413 \pm 0,0015) * 10^{-3} m}}$$

Délka páky:

	q [m]	Δq_i
	1,023E-01	-2,000E-04
	1,025E-01	0,000E+00
	1,025E-01	0,000E+00
	1,027E-01	2,000E-04
	1,028E-01	3,000E-04
	1,022E-01	-3,000E-04
	1,025E-01	0,000E+00
Průměrná délka páky \bar{q}	1,025E-01	
Pravděpodobná chyba $\bar{\vartheta}(\bar{q})$	5,245E-05	

$$\bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i}{n} = \frac{0,1023 + \dots + 0,1025 * 10^{-3}}{7} \doteq 0,1025 m$$

$$\Delta q_i = q_i - \bar{q} = 0,1023 - 0,1025 \doteq -0,0002$$

$$\bar{\vartheta}(\bar{q}) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta q_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{7(7-1)} \sum_{i=1}^n [(-0,0002)^2 + \dots + (0)^2]} \doteq 5,2 * 10^{-5} m$$

$$\underline{\underline{q = (0,1025 \pm 0,000052) m}}$$

Vzdálenost uchycení drátu od osy otáčení p:

	p [m]	Δp_i
	5,190E-02	0,000E+00
	5,170E-02	-2,000E-04
	5,210E-02	2,000E-04
	5,160E-02	-3,000E-04
	5,200E-02	1,000E-04
	5,220E-02	3,000E-04
	5,180E-02	-1,000E-04
Průměrná délka páky \bar{p}	5,190E-02	
Pravděpodobná chyba $\bar{\vartheta}(\bar{p})$	5,443E-05	

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} = \frac{0,0519 + \dots + 0,0518}{7} \doteq 0,0519m$$

$$\Delta p_i = p_i - \bar{p} = 0,0519 - 0,0519 = 0$$

$$\bar{\vartheta}(\bar{p}) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta p_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{7(7-1)} \sum_{i=1}^n [(0)^2 + \dots + (-0,0001)^2]} \doteq 5,4 * 10^{-5} m$$

$$\underline{\underline{p = (0,0519 \pm 0,000054)m}}$$

Tabulka pro výpočet modulu pružnosti bronzu:

Počet závaží	G _i [N]	n _i ' [m]	n _i '' [m]	n _i [m]	n _i - n ₀
0	0	0,306	0,308	0,307	0
1	9,81	0,324	0,326	0,325	0,018
2	19,62	0,338	0,34	0,339	0,032
3	29,43	0,351	0,352	0,3515	0,0445
4	39,24	0,363	0,367	0,365	0,058
5	49,05	0,376	0,377	0,3765	0,0695
6	58,86	0,388	0,388	0,388	0,081
Σ _i G _i	206,01			Σ _i (n _i - n ₀) →	0,303

$$E = \frac{8alq}{\pi d^2 p^2} \frac{\sum_i G_i}{\sum_i (n_i - n_0)} = \frac{8 * 1 * 0,985 * 0,1025}{\pi * (1,413 * 10^{-3})^2 * 0,0519^2} * \frac{206,01}{0,303} = 3,2503 * 10^{10} Pa$$

Použité přístroje a pomůcky

Přípravek na měření, dalekohled, pásové měřítko, posuvka, mikrometr, 1 kilogramová závaží

Závěr

Výpočet pravděpodobné chyby měření modulu pružnosti E:

Základní vzorec si přepíšu, získám tak nějakou konstantu \underline{k} (pr jednoduchost se nezabývám chybou vzniklou měřením z při zatěžování a odlehčování, součet průměrů n_i beru jako konstantní) a 3 proměnné, se kterými pak budu pracovat pomocí parciálních derivací.

$$E = \frac{8 * a * l * \sum_i G_i}{\pi * \sum_i \Delta n_i} * \frac{q}{d^2 * p^2}$$

$$\frac{8 * a * l * \sum_i G_i}{\pi * \sum_i \Delta n_i} = k$$

$$\bar{\vartheta}_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 \bar{\vartheta}_q^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d}\right)^2 \bar{\vartheta}_d^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)^2 \bar{\vartheta}_p^2}$$

A tedy:

$$\bar{\vartheta}_E = \sqrt{\left(\frac{k}{d^2 p^2}\right)^2 \bar{\vartheta}_q^2 + \left(\frac{-2qk}{d^3 p^2}\right)^2 \bar{\vartheta}_d^2 + \left(\frac{-2qk}{d^2 p^3}\right)^2 \bar{\vartheta}_p^2}$$

$$\bar{\vartheta}_E = \sqrt{\left(\frac{k^2}{d^4 p^4}\right) \bar{\vartheta}_q^2 + \left(\frac{4q^2 k^2}{d^6 p^4}\right) \bar{\vartheta}_d^2 + \left(\frac{4q^2 k^2}{d^4 p^6}\right) \bar{\vartheta}_p^2}$$

Pravděpodobná chyba E pro OCEL:

$$k = \frac{8 * 1 * 0,985 * 206,01}{\pi * 0,2035} = 2539,219$$

$$\bar{\vartheta}_E = \sqrt{\left(\frac{2539,219^2}{(1,401 * 10^{-3})^4 (0,0519)^4}\right) (5,2 * 10^{-5})^2 + \left(\frac{4 * 0,1025^2 * 2539,219^2}{(1,401 * 10^{-3})^6 * (0,0519)^4}\right) (2,2 * 10^{-6})^2 + \left(\frac{4 * 0,1025^2 * 2539,219^2}{(1,401 * 10^{-3})^4 * (0,0519)^6}\right) (5,4 * 10^{-5})^2}$$

$$\bar{\vartheta}_E \doteq 1,9 * 10^8 Pa$$

$$\underline{\underline{E_{ocel} = (4,923 \pm 0,019) * 10^{10} Pa}}$$

Pravděpodobná chyba E pro BRONZ:

$$k = \frac{8 * 1 * 0,985 * 206,01}{\pi * 0,303} = 1705,383$$

$$\bar{\vartheta}_E = \sqrt{\left(\frac{1705,383^2}{(1,413 * 10^{-3})^4 (0,0519)^4}\right) (5,2 * 10^{-5})^2 + \left(\frac{4 * 0,1025^2 * 1705,383^2}{(1,413 * 10^{-3})^6 * (0,0519)^4}\right) (1,5 * 10^{-6})^2 + \left(\frac{4 * 0,1025^2 * 1705,383^2}{(1,413 * 10^{-3})^4 * (0,0519)^6}\right) (5,4 * 10^{-5})^2}$$

$$\bar{\vartheta}_E \doteq 9,8 * 10^7 Pa$$

$$\underline{\underline{E_{bronz} = (3,2503 \pm 0,0098) * 10^{10} Pa}}$$

Závěrem porovnávám naměřené hodnoty modulu pružnosti E s tabulkovými hodnotami:

	Naměřené hodnoty [Pa]	Tabulkové hodnoty [Pa]
OCEL	$(4,923 \pm 0,019) * 10^{10}$	$20 * 10^{10}$ až $21 * 10^{10}$
BRONZ	$(3,2503 \pm 0,0098) * 10^{10}$	$9,7 * 10^{10}$ až $10,2 * 10^{10}$

Námi naměřené hodnoty odpovídají hodnotám tabulkovým alespoň řádově. Případná nepřesnost může být způsobena různými vlivy. Například nepřesností při odečítání na stupnici, či například ne úplně přesně změřená délka drátu, jelikož to, kde drát u horního šroubu skutečně končí je více než nejasné. Je tedy pravděpodobné, že jsme mohli trochu nepřesně odhadnout, odkud máme jeho délku měřit. Blízko našeho pracoviště (prakticky přes uličku) také probíhala úloha „Stanovení modulu pružnosti v tahu přímou metodou“, při které byla „lampa na vysoušení vzorků“ natočena směrem k nám, takže můžeme předpokládat vliv teploty na přesnost našeho měření. (A pokud by stoupla teplota, roste Δl , a to znamená, že klesá E.)